



รายงานฉบับสมบูรณ์สำหรับงานวิจัยเรื่อง

ความไม่เสถียรของโซลิตอนในพลาสมาที่อุณหภูมิของอิเล็กตรอนต่างกันเพียงเล็กน้อยของ
ฟังก์ชันการกระจายตัวของอิเล็กตรอนสำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้น

Instability of a soliton in plasma with a slightly non-isothermal electron
distribution function for the nonlinear Schrödinger equation

โดย

ศรัณย์ ภิบาลชนม์

ภายใต้การสนับสนุนงบประมาณจาก

ทุนอุดหนุนการวิจัยงบประมาณเงินรายได้(เงินอุดหนุนจากรัฐบาล) มหาวิทยาลัยบูรพา

ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2558

พฤษภาคม 2560

รายงานฉบับสมบูรณ์

**ความไม่เสถียรของโซลิตอนในพลาสมาที่อุณหภูมิของอิเล็กตรอนต่างกันเพียงเล็กน้อยของฟังก์ชัน
การกระจายตัว ของอิเล็กตรอนสำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้น**

นายศรัณย์ ภิบาลชนม์
ภาควิชาการจัดการเรียนรู้ คณะศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยบูรพา

พฤษภาคม 2560

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้จากเงินอุดหนุนรัฐบาล
(งบประมาณแผ่นดิน) ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2558 มหาวิทยาลัยบูรพา
ผ่านสำนักงานคณะกรรมการการวิจัยแห่งชาติ เลขที่สัญญา 130/2558

บทคัดย่อ

สมการที่มีความไม่เชิงเส้นน้อยสำหรับตัวกลางพลาสมาที่ใช้ฟังก์ชันการกระจายตัวของอิเล็กตรอน ที่มีอุณหภูมิต่างกันเพียงเล็กน้อยจะสามารถใช้การแปลงของไหลเมตเตอร์ลุนนำไปสู่สมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นได้ และ ผลเฉลยโซลิตอนของชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นนี้จะไม่เสถียร ภายใต้การรบกวนด้วยคลื่นที่มีความยาวคลื่นสูง

Using the Madelung's fluid transformation, a weakly nonlinear equation for the plasma with a slightly non-isothermal electron distribution function can be transformed to the nonlinear Schrödinger equation. The soliton solution of this nonlinear Schrödinger equation is not stable for the long-wavelength perturbation.

สารบัญ

1	บทนำ	3
1.1	คลื่นในตัวกลางพลาสมา	3
2	การแปลงของไฮลเมคเตอร์สูง	8
3	ความไม่เสถียรของโซลิตอนที่ถูกกระทบด้วยความยาวคลื่นสูง	10
4	สรุป และ วิเคราะห์ผล	12

สารบัญรูป

1.1	การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ KdV โดยใช้ $\eta = 0.25$, $x_0 = 0$, $V = 0.25$	4
1.2	คลื่นหลายความสูงเคลื่อนที่ชนกัน	4
1.3	การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ cNLS โดยใช้ $\eta = 0.5$, $x_0 = -30$, $V = 5.0$	7
1.4	การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ sNLS โดยใช้ $\eta = 0.5$, $x_0 = -30$, $V = 5.0$	7
3.1	การวิวัฒน์ตามเวลาของโซลิตอนที่ไม่เสถียรสำหรับ $\eta = 0.2$	11
4.1	การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ Kadomtsev-Petviashvili แบบ ปรับปรุง	12

บทที่ 1

บทนำ

ในบทนี้จะเป็นการแสดงภาพรวมของการหาสมการที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นน้อยๆ สำหรับระบบที่เป็นพลาสมา

1.1 คลื่นในตัวกลางพลาสมา

พลาสมาเป็นสถานะที่ประกอบด้วยประจุไฟฟ้า และเป็นส่วนประกอบที่มากกว่า 90% ของสสารในอวกาศ และในตัวกลางพลาสมามีการสั่นในหลายๆ โหมด [1] อย่างไรก็ตาม ในรายงานนี้เราจะพิจารณาเฉพาะโหมดการสั่นเดียวที่เรียกว่า ion-acoustic waves ซึ่งสามารถให้ ผลเฉลยคลื่นโซลิตารีได้

โซลิตอนเป็นชื่อเรียกคลื่นโซลิตารี (solitary waves) เพราะเนื่องจากว่าเมื่อคลื่นโซลิตารี สองตัววิ่งชนกัน หลังจากการชนกันจะได้คลื่นโซลิตารีตัวเดิมกลับมา ซึ่งเป็นคุณสมบัติของอนุภาค ดังนั้นเราจึงเรียกคลื่นโซลิตารีอีกชื่อหนึ่งว่าโซลิตอน

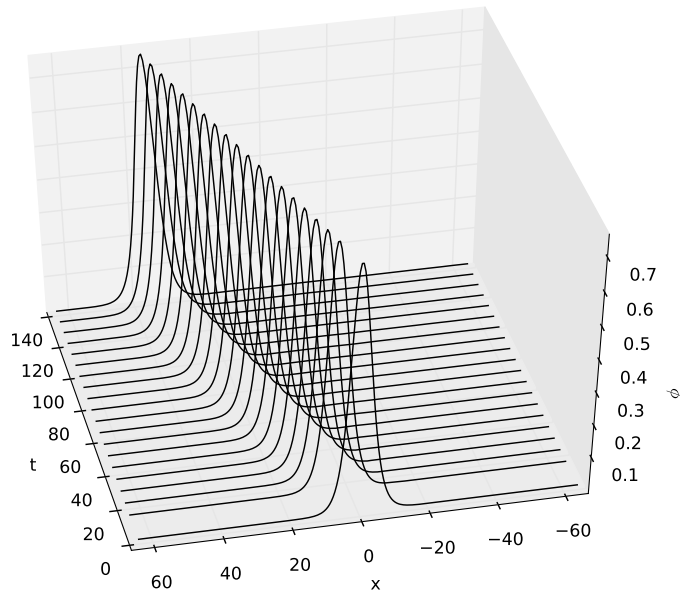
คลื่นโซลิตารีถูกค้นพบครั้งแรกโดย John Scott Russell [2] เมื่อสังเกตคลื่นที่เกิดจากการหยุดของเรือในลำคลองของสกอตแลนด์ โดยคลื่นที่เกิดขึ้นหน้าเรื่อนั้นจะวิ่งไปด้วยอัตราเร็วคงที่และ ไม่มีการกระจายเหมือนคลื่นทั่วไป อย่างไรก็ตามการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้บรรยายโซลิตอนนี้ได้ถูกคิดขึ้นโดย Korteweg และ de Vries จนเป็นที่มาของสมการ Korteweg-de Vries (KdV) [2]

$$\phi_t + \phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

โดยตัวห้อย t และ x แสดงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา และ อวกาศ (space) เทอมที่สองแสดงความไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinearity) และเทอมสุดท้ายแสดง ลักษณะการกระจายตัว (dispersion) ของคลื่น ผลเฉลยของสมการ KdV (1.1) แสดงถึงการวิวัฒนาการตามเวลาของความสูงของคลื่น KdV แบบ traveling wave สามารถเขียนได้เป็น

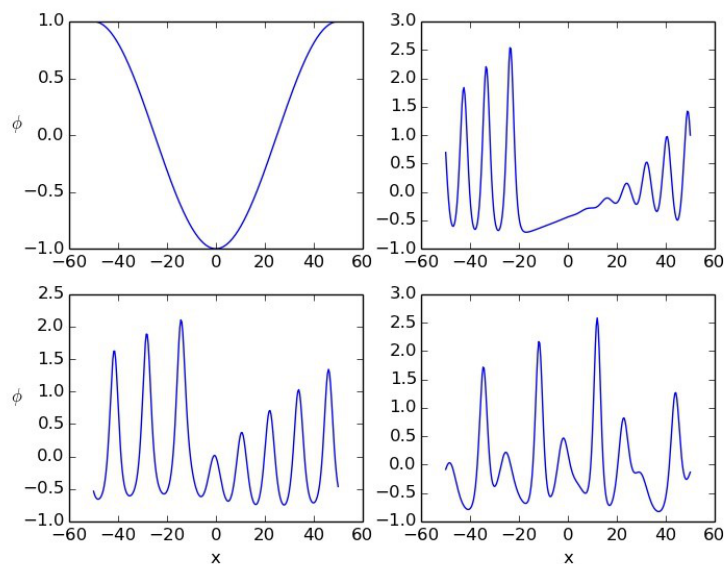
$$\phi(x, t) = 12\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(x - Vt - x_0)$$

ซึ่ง η เป็นค่าคงที่ และ V แสดงอัตราเร็วของคลื่น รูปที่ 1.1 แสดงการเคลื่อนที่ของโซลิตอนจากสมการ (1.1) ที่ความสูงของคลื่นไม่มีการเปลี่ยนแปลงขณะที่เคลื่อนที่ ผลการชนกันแล้วทำให้กลับมา



รูปที่ 1.1: การวิวัฒนาการของคลื่นโซลิตอนของสมการ KdV โดยใช้ $\eta = 0.25$, $x_0 = 0$, $V = 0.25$

เป็นคลื่นแบบเดิมได้ถูกแสดง และเรียกว่าโซลิตอนครั้งแรกจากโดย Zabuskey และ Kruskal [3] ดังแสดงในรูปที่ 1.2 ซึ่งเริ่มจากคลื่นฟังก์ชัน cosine เป็นค่าเริ่มต้น โดยในฟังก์ชันนี้มีหลายโซลิตอนบรรจุอยู่เมื่อใส่กลับเข้าไปในสมการ (1.1) จะทำให้ได้โซลิตอนตามรูป แล้วเคลื่อนที่เข้าหากัน และผลก็พบว่าคลื่นกลับมาเป็นแบบเดิมหลังจากการชนกัน



รูปที่ 1.2: คลื่นหลายความสูงเคลื่อนที่ชนกัน

สำหรับตัวกลางพลาสมาที่พิจารณาเฉพาะแรงทางประจุไฟฟ้า และ ประจุบวก และ ประจุลบมี อุณหภูมิค่า เดียว รวมทั้งจะไม่มี การชนกันอีกด้วยจะสามารถหาสมการ KdV ได้ [4] โดยพิจารณา

สมการ เหล่านี้ ในรูปแบบที่มีสัมประสิทธิ์เป็น 1 ทั้งหมด และเป็น 1 มิติ

- สมการอนุพันธ์มวล

$$n_t + (nu)_x = 0 \quad (1.2)$$

- สมการอนุพันธ์โมเมนตัม

$$v_t + v \frac{\partial}{\partial x} v = -\phi_x \quad (1.3)$$

- สมการ Poisson

$$\phi_{xx} = n_e - n \quad (1.4)$$

โดย ตัวห้อย x และ t แสดงคืออนุพันธ์ย่อยเทียบกับ ตำแหน่ง และ เวลา ตามลำดับ v แสดงความเร็วของอิเล็กตรอนในทิศใดทิศหนึ่งทิศเดียว ϕ แสดงคือศักย์ไฟฟ้าของสนามไฟฟ้าระหว่าง ประจุในตัวกลางพลาสมา และ n แสดงถึงความหนาแน่นของไอออนบวก ขณะที่ n_e คือความหนาแน่นของอิเล็กตรอน และ การกระจายตัวของอิเล็กตรอนจะบรรยายจากฟังก์ชัน Maxwellian [4]

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{K_B T}\right)$$

ซึ่ง n_0 คือจำนวนของความหนาแน่นอิเล็กตรอนตอนที่ยังไม่มีสนามไฟฟ้าภายนอก เมื่อพิจารณาความเป็นไม่เชิงเส้นน้อย เราสามารถกำหนดตัวแปรสำหรับที่จะทำการประมาณสำหรับการพิจารณาเงื่อนไขดังกล่าว โดย ตัวแปรที่ใช้จะเขียนได้เป็น

$$\xi = \epsilon^{1/2}(x - t) \quad \tau = \epsilon^{3/2}t$$

และ พิจารณาการกระจายตัวของตัวแปรต่างๆเป็น

$$n = 1 + \epsilon n_1 + \epsilon^2 n_2 + \dots$$

$$v = \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \dots$$

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots$$

$$n_e = 1 + \phi + \phi^2 + \dots$$

เมื่อแทนค่าตัวแปรต่างๆลงในสมการ (1.2)-(1.4) แล้วเก็บสัมประสิทธิ์หน้า ϵ ถึงอันดับที่ 1 เราจะได้สมการ KdV เช่นกัน

ถ้าพิจารณาเงื่อนไขที่ให้ไอออนบวกสามารถกักอิเล็กตรอนได้ในบางระดับพลังงาน ตามการเสนอของ Schamel [5, 6] รูปแบบของการกระจายตัวของอิเล็กตรอนจะถูกปรับเปลี่ยนเป็น

$$n_e = e^{\phi \operatorname{erfc}(\sqrt{\phi})} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \begin{cases} e^{\beta \phi \operatorname{erf}(\sqrt{\beta} \phi)} & ; \beta \geq 0 \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} W(\sqrt{-\beta} \phi) & ; \beta < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

โดย $W(x)$ คือฟังก์ชัน Dawson

$$W(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

$\beta = \frac{T_{ef}}{T_{eT}}$ เป็นอัตราส่วนระหว่างอุณหภูมิของอิเล็กตรอนที่วิ่งอย่างอิสระและอิเล็กตรอนที่ถูกกักในศักย์ของ ไอออนบวก และ เมื่อพิจารณาความเป็นไม่เชิงเส้นอย่างน้อยๆ และ ใช้การกระจายตัวของอิเล็กตรอนแทน Maxwellian เราจะได้สมการ KdV แบบปรับปรุงเป็น

$$\phi_t + \phi^{1/2} \phi_x + \phi_{xxx} = 0 \quad (1.6)$$

ถ้าเราพิจารณาให้อุณหภูมิของอิเล็กตรอนที่กัก และ วิ่งอย่างอิสระ ต่างกักเล็กน้อย เราจะได้สมการ KdV แบบปรับปรุงที่มีเทอมไม่เชิงเส้น 2 เทอม [7, 8] ความเป็นไม่เชิงเส้นน้อยๆ จะทำให้เขียนการประมาณของความหนาแน่นของอิเล็กตรอนได้เป็น

$$n_e = 1 + \phi - \frac{4}{3}b\phi^{3/2} + \frac{1}{2}\phi^2 + O(\phi^{5/2})$$

โดย $b = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{T_{ef}}{T_{et}}\right)$ โดยสมการ KdV แบบปรับปรุงจะเขียนได้เป็น

$$\phi_t + \phi^{1/2} \phi_x + \phi \phi_x + \phi_{xxx} = 0 \quad (1.7)$$

สมการที่ถูกปรับปรุงที่กล่าวมาทั้งหมดจะอยู่บนพื้นฐานของโหมดการสั่นที่เรียกว่า ion-acoustic waves สมการที่บรรยายโซลิตอนไม่ได้มีแค่ KdV แต่ยังมีอีกรูปหนึ่งที่อยู่กันดีคือ สมการ nonlinear Schrödinger equation โดยสมการที่อยู่กันดีในโดยเฉพาะในการไฟเบอร์ โยแก้วนำแสงคือ cubic nonlinear Schrödinger equation (cnls) [9]

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^2 \phi = 0 \quad (1.8)$$

ผลเฉลยของสมการ (1.8) ในรูปของ traveling wave จะเขียนได้เป็น

$$\phi(x, t) = \sqrt{2}\eta \operatorname{sech} \eta(x - Vt - x_0) e^{i(xV/2 - Vt)}$$

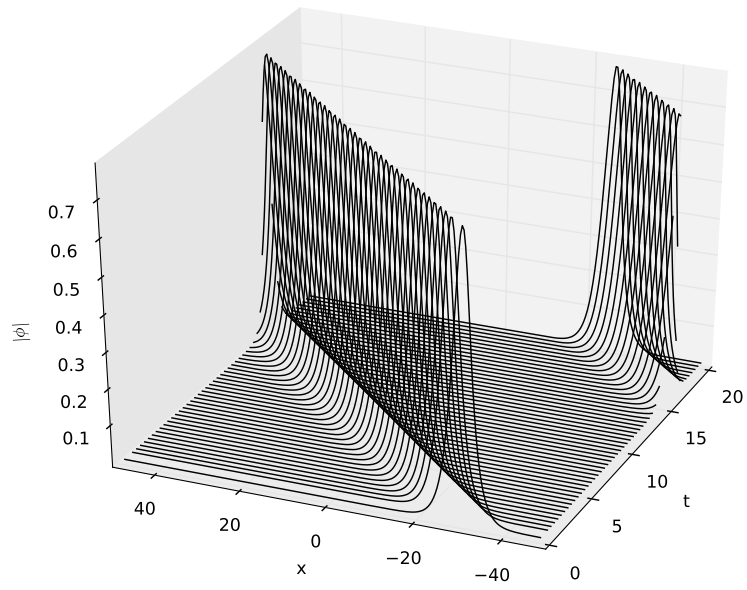
โดย V แสดงอัตราเร็วของโซลิตอน และ η เป็นค่าคงที่ รูปที่ 1.3 แสดงการวิวัฒนาการตามเวลาของผลเฉลยของสมการ cnls สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นที่บรรยายการสั่นของประจุบวกในสถานะพลาสมาที่มีประจุลบวิ่งอยู่ รอบๆ [10] จะเขียนอยู่ในรูป

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^{1/2} \phi = 0 \quad (1.9)$$

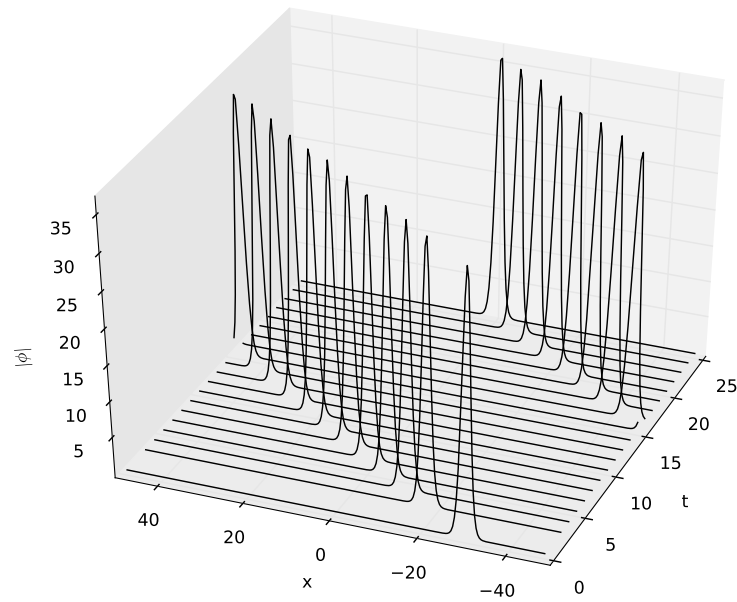
ผลเฉลยของสมการ (1.9) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\phi(x, t) = 400\eta^4 \operatorname{sech}^2 \eta(x - Vt - x_0) e^{i(xV/2 - Vt)}$$

และการวิวัฒนาการของโซลิตอนนี้แสดงในรูป 1.4 ส่วนใหญ่สมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นมักจะถูกบรรยายในระบบของใยแก้วนำแสงทำให้เราไม่ค่อยพบรูป แบบปรับปรุงอื่นๆเหมือนกับสมการ KdV แต่ว่าความสัมพันธ์ของสมการทั้งสองสามารถหาได้จากการแปลง ของไหลเมตเตอร์ลู่ [11, 12, 13]



รูปที่ 1.3: การวิวัฒนาการของคลื่นโซลิตอนของสมการ cNLS โดยใช้ $\eta = 0.5$, $x_0 = -30$, $V = 5.0$



รูปที่ 1.4: การวิวัฒนาการของคลื่นโซลิตอนของสมการ sNLS โดยใช้ $\eta = 0.5$, $x_0 = -30$, $V = 5.0$

บทที่ 2

การแปลงของไหลเมตเตอร์ลุง

หลักการของการแปลงนี้จะเป็นการทำย้อนกลับไปยังสมการของไหลโดยตัวแปลงจะ ใช้ผลเฉลยของ คลื่นเชิงเส้นกล่าวคือความสูง และ เฟสของคลื่น

$$\phi(x, t) = \sqrt{\rho(x, t)} e^{i\Theta(x, t)} \quad (2.1)$$

โดย $\rho = |\phi|^2$ จะถูกเรียกว่าความหนาแน่นของไหลเมตเตอร์ลุง (Madelung's fluid density) เมื่อ แทนสมการ(2.1) ลงในสมการที่ศึกษาจะทำให้ ย้อนกลับไปยังต้นกำเนิดของสมการคลื่น ซึ่งในรายงาน นี้เราจะพิจารณาสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้น แบบปรับปรุงนี้

$$i\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|\phi + |\phi|^2\phi = 0 \quad (2.2)$$

แทนสมการ (2.1) ลงในสมการ (2.2) และ พิจารณาสมการ ที่เป็นส่วนจริง

$$\frac{1}{2}\rho_t + (\rho V)_x = 0 \quad (2.3)$$

และ ส่วนจินตภาพ

$$V_t + 2VV_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho + \rho^{1/2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sqrt{\rho} \right] \quad (2.4)$$

ซึ่ง $V(x, t) = \frac{\partial \Theta}{\partial x}$ จะเรียกว่าความเร็วของของไหล (current velocity) ซึ่งเป็นสมการของไหล สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้น และ การหาผลเฉลยของสมการของ ไหลนี้ จะต้องกำจัดตัวแปร หนึ่งตัว โดยในเงื่อนไขนี้เราจะกำจัดตัวแปรความเร็วของของไหล โดยการ จัดเทอมให้อยู่ในรูปของ การอนุรักษ์โมเมนตัม คล้ายๆกับสมการ (1.3) ดังนั้นสมการของส่วนจริง (2.3) จะเขียนได้เป็น

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} V + 2V \frac{\partial}{\partial x} V \right) = -V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial t} - 2V^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

และจากสมการ (2.4) จะได้ว่า

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} V + 2V \frac{\partial}{\partial x} V \right) = \rho \frac{\partial}{\partial x} (\rho + \sqrt{\rho}) + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sqrt{\rho} \right]$$

ด้านขวามือของสมการทั้งสองจะเท่ากัน เราทำการอินทิเกรตเทียบกับเวลาหนึ่งครั้งจะได้

$$\begin{aligned} & -V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial t} + 2 \left[-c(t) + \frac{\partial}{\partial t} \int V dx \right] \frac{\partial}{\partial x} \rho \\ & = \left(\rho \frac{\partial}{\partial x} (\rho + \sqrt{\rho}) + 2 (\rho + \sqrt{\rho}) \frac{\partial}{\partial x} \rho \right) + \frac{\rho_{xxx}}{2} \end{aligned}$$

โดย $c(t)$ เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรต สมการนี้จะบรรยายคลื่นโดยทั่วไป แต่เราต้องการผลเฉลยที่เป็นคลื่นโซลิตารี ทำให้ต้องกำหนดเงื่อนไข สำหรับคลื่นโซลิตารี โดยกำหนดให้ของไหลเมตเตอร์ลู่ไหลด้วยอัตราเร็วคงที่ $V = V_0$ และทำให้ได้

$$\Theta = V_0 x - 2c_0 t \quad \text{และ} \quad c(t) = c_0$$

ตัวห้อยศูนย์แสดงค่าคงที่ การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยรูปแบบหนึ่งคือการเปลี่ยนให้เป็น สมการอนุพันธ์ที่มีตัวแปรตัวเดียว หรือที่เรียกว่า traveling wave solution โดยเราจะพิจารณา $\xi = x - 2V_0 t$ และ จะได้ว่า

$$(V_0^2 - 2c_0) \frac{d}{d\xi} \rho = 3\rho \frac{d}{d\xi} \rho + \frac{5}{2} \sqrt{\rho} \frac{d}{d\xi} \rho + \frac{1}{4} \frac{d^3}{d\xi^3} \rho \quad (2.5)$$

เมื่อพิจารณาส่วนต่างๆของสมการ(2.5) ซึ่งก็คือสมการ(1.7) นั้นเอง หรืออีกนัยหนึ่งผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นสำหรับพลาสมาที่มีการกักอิเล็กตรอนที่อุณหภูมิของอิเล็กตรอนต่างกัน เล็กน้อยจะสามารถหาได้ ซึ่งจะเขียนได้เป็น [14]

$$\phi = \frac{12\eta^2}{1 + \sqrt{1 + 18\eta^2} \cosh 2\eta(\xi - \xi_0)} e^{i \left(\frac{c_0 x}{2} - \left\{ \frac{c_0^2}{4} - 4\eta^2 \right\} t \right)} \quad (2.6)$$

บทที่ 3

ความไม่เสถียรของโซลิตอนที่ถูกרבกวนด้วยความยาวคลื่นสูง

เราจะרבกวนผลเฉลยโซลิตอนตามสมการ(2.6) โดยคลื่นฟังก์ชัน cosine ที่มีความยาวคลื่นสูง การרבกวนจะเขียนได้เป็น

$$\phi = (\phi_0 + \epsilon n(\xi, y, t)) e^{i(xV_0 - 2c_0 t)}$$

โดย $n(\xi, y, t) = (u(\xi) + iv(\xi)) e^{iky + \gamma t}$ ค่าของ γ จะบอกว่า ϕ_0 นั้นเสถียรหรือไม่ โดยเราจะพิจารณา $\gamma > 0$ เพราะจะทำให้เกิดความไม่เสถียรต่อการרבกวน นอกนั้นจะไม่ทำให้คลื่นมีการเปลี่ยนแปลง

แทนการרבกวนนี้ลงในสมการที่เป็น 2 มิติ เพราะว่าเราจะרבกวนในทิศที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของคลื่น

$$i\phi_t + \phi_{xx} + \phi_{yy} + |\phi|\phi + |\phi|^2\phi = 0$$

หลังจากการแทนค่าจะทำให้เก็บเทอมที่เป็น ϵ กำลังหนึ่ง จะได้สมการ เกี่ยวข้องกัน (couple equation)

$$\begin{aligned} u_{\xi\xi} + \left(3\phi_0^2 + \frac{5}{2}\phi_0 - (k^2 - \omega)\right) u &= \gamma v, \\ v_{\xi\xi} + \left(\phi_0^2 + \frac{\phi_0}{2} - (k^2 - \omega)\right) v &= -\gamma u. \end{aligned}$$

และสามารถเขียน Lagrangian ได้เป็น

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} d\xi \\ \mathcal{L} &= \frac{u_{\xi}^2}{2} - \frac{v_{\xi}^2}{2} - \left(3\phi_0^2 + \frac{5}{2}\phi_0 - (k^2 - \omega)\right) \frac{u^2}{2} - \left(\phi_0^2 + \frac{\phi_0}{2} - (k^2 - \omega)\right) \frac{v^2}{2} + \gamma uv \end{aligned} \quad (3.1)$$

เนื่องจากเป็นสมการไม่เชิงเส้น และ ไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบพิเศษใดๆได้ ทำให้เราต้อง ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขคำนวณความไม่เสถียรนี้ อย่างไรก็ตาม เราสามารถหาค่าความยาวคลื่นที่ใช้ในการרבกวน

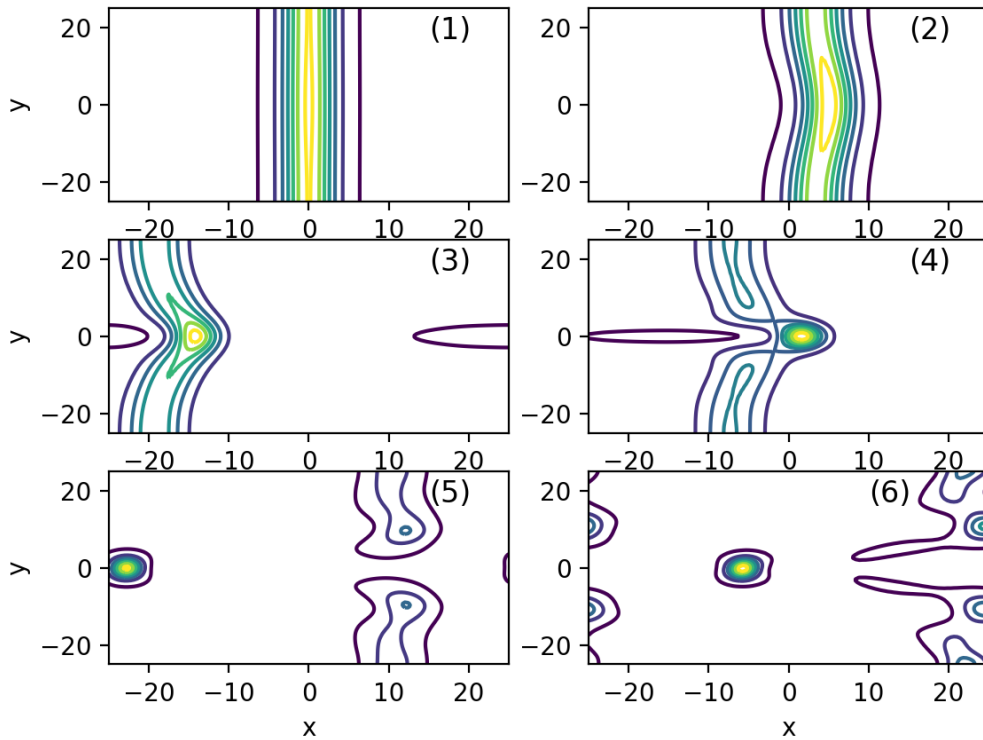
เพื่อดูว่าผลเฉลยมีความเสถียรหรือไม่ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เราจะใช้จะเรียกว่า spectral method [15] โดยจะทำการแปลงฟูเรียร์กับตัวแปรที่อยู่ในมิติของอวกาศ ส่วนตัวแปรที่อยู่ในมิติของเวลาจะใช้วิธี Runge-Kutta อันดับ 4

$$\frac{d\phi}{dt} = -i \left(F^{-1} \left((\xi^2 + \chi^2) F(\phi) \right) - |\phi|\phi - |\phi|^2\phi \right)$$

F และ F^{-1} แสดง Fourier และ inverse Fourier transforms ตามลำดับ นอกจากนี้

$$[F(\phi)]_{p,q} = \sum_{l=0}^{N_x-1} \sum_{m=0}^{N_y-1} \phi_{l,m} e^{i(\xi_p x_l + \chi_q y_m)}$$

โดย $(\xi_p, \chi_q) = 2\pi(p/L_x, q/L_y)$ สำหรับ $p = 0, \dots, N_x - 1$ และ $q = 0, \dots, N_y - 1$ สำหรับตัวอย่างที่ใช้จะมีค่าต่อไปนี้ $L_x \in [-50, 50]$, $L_y \in [-50, 50]$, $x_0 = 0$, $dt = 0.0005$, $N_x = 128$ and $N_y = 128$ ผลของความไม่เสถียร จะทำให้โซลิตอนกลายเป็นโซลิตอนใน 2 มิติ ตามรูป



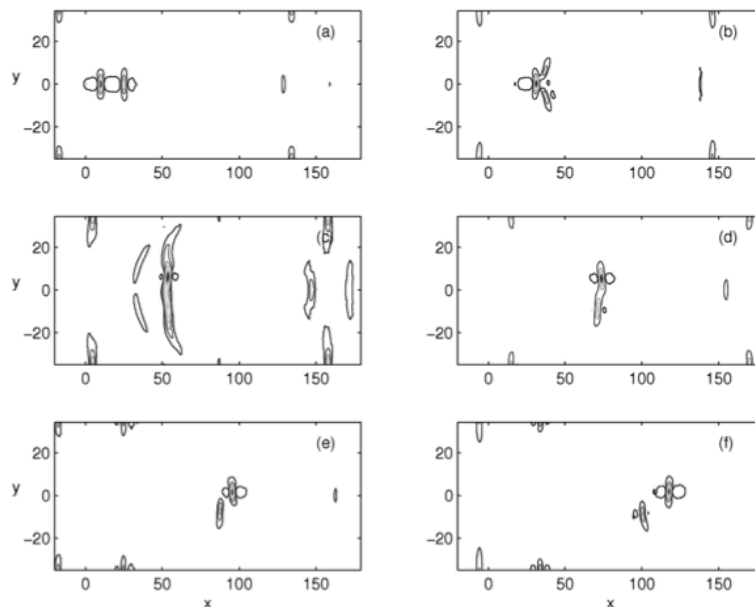
รูปที่ 3.1: การวิวัฒนาการตามเวลาของโซลิตอนที่ไม่เสถียรสำหรับ $\eta = 0.2$

บทที่ 4

สรุป และ วิเคราะห์ผล

แม้ว่าเราจะยังไม่สามารถเริ่มต้นการหาสมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นที่จะบรรยายการสั่นของไอออน โดยที่บางส่วน มีการกักอิเล็กตรอนไว้ด้วยจากสมการของไหลได้ แต่การหาความสัมพันธ์ระหว่างสมการ KdV และ NLS จะเป็นโอกาสที่จะใช้สมการชเรอดิงเงอร์ไม่เชิงเส้นบรรยายระบบทางฟิสิกส์แบบอื่นๆ ในอนาคตนอกเหนือจากทางด้านออปติก

การค้นพบความไม่เสถียรจากการรบกวนด้วยฟังก์ชันใดๆ ของโซลิตอนจะเป็นแนวโน้มที่ดีสำหรับการศึกษา โซลิตอนในมิติที่สูงขึ้น เพราะการหาผลเฉลยโดยตรงอาจไม่สามารถทำได้ ความไม่เสถียรจึงเป็นตัวอย่างหนึ่งที่สามารถทำให้เราค้นพบโซลิตอนในมิติที่สูงขึ้น เช่น การพยายามศึกษาการชนกันของวอร์เทกซ์โซลิตอน เช่น Kadomtsev-Petviashvili แบบปรับปรุง [16] ซึ่งให้ผลการคำนวณที่คล้ายกับการทดลองนี้ ตามรูปที่ 4.1 ซึ่งแสดงการกระเจิงหลังจากชนกันซึ่งเป็นคุณสมบัติของอนุภาค ไม่ใช่คลื่น



รูปที่ 4.1: การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ Kadomtsev-Petviashvili แบบปรับปรุง

บรรณานุกรม

- [1] J. D. Callen, *Fundamentals of Plasma Physics*.
<http://homepages.cae.wisc.edu/~callen/>
- [2] E. Infeld and G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [3] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240 (1965).
- [4] H. Washimi and T. Taniuti, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 996 (1966).
- [5] H. Schamel, *Plasma Phys.* **14**, 905 (1972).
- [6] H. Schamel, *J. Plasma Phys.* **9**, 377 (1973).
- [7] P. K. Shukla and R. Bharuthram, *Phys. Rev. A* **34**, 4457 (1986).
- [8] M. A. Allen, S. Phibanchon, and G. Rowlands, *J. Plasma Phys.* **73**, 215 (2007).
- [9] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 4th edn. (Academic Press, New York, 2007).
- [10] S. Phibanchon and M. A. Allen, in *The 34th Congress on Science and Technology of Thailand*, p. D0029 (King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 2008).
- [11] R. Fedele, *Phys. Scr.* **65**, 502 (2002).
- [12] R. Fedele and H. Schamel, *Eur. J. Phys. B* **27**, 313 (2002).
- [13] R. Fedele, H. Schamel, and P. K. Shukla, *Phys. Scr.* **T98**, 18 (2002).
- [14] S. Phibanchon and M. Allen, *STT40* pp. 100–4 (2014).
- [15] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).

- [16] S. Phibanchon and M. A. Allen, in *The 2007 International Conference on Computational Science and its Applications (ICCSA 2007)*, pp. 20–3 (IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA, USA, 2007).