รายงานฉบับสมบูรณ์สำหรับงานวิจัยเรื่อง

การวิเคราะห์ความไม่เสถียรของโซลิตอนของสมการชเรอดิงเจอร์ไม่เชิงเส้นรูปทั่วไปจากการรบกวนจากคลื่นความยาวสูงในแนวตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของโซลิตอน

Instability analysis of the transverse perturbation to a soliton solution of the generalized nonlinear Schrödinger equation

โดย

เชษฐ์ ศิริสวัสดิ์

ภายใต้การสนับสนุนงบประมาณจาก
ทุนอุดหนุนการวิจัยงบประมาณเงินรายได้(เงินอุดหนุนจากรัฐบาล) มหาวิทยาลัยบูรพา
ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2558

พฤษภาคม 2560

รหัสโครงการ 173068
สัญญาเลขที่ 132/2558

รายงานฉบับสมบูรณ์

การวิเคราะห์ความไม่เสถียรของโซลิตอนของสมการชเรอดิงเจอร์ไม่เชิงเส้นรูปทั่วไปจากการ รบกวนจากคลื่นความยาวสูงในแนวตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของโซลิตอน

เชษฐ์ ศิริสวัสดิ์
ภาควิชาการจัดการเรียนรู้ คณะศึกษาศาสตร์
มหาวิทยาลัยบูรพา

พฤษภาคม 2560

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้จากเงินอุดหนุนรัฐบาล
(งบประมาณแผ่นดิน) ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2558 มหาวิทยาลัยบูรพา
ผ่านสำนักงานคณะกรรมการการวิจัยแห่งชาติ เลขที่สัญญา 132/2558

บทคัดย่อ

การรบกวนผลเฉลยโซลิตอนของสมการชเรอดิงเจอร์ไม่เชิงเส้นรูปแบบทั่วไปจากคลื่นความยาวสูง ในทิศตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของโซลิตอนจะทำให้โซลิตอนในทุก รูปแบบไม่เสถียรทั้งหมด อัตราการเพิ่มจะแสดงขอบเขตของความยาวคลื่นในรูปของกราฟ เนื่องจากไม่สามารถแสดงรูปแบบของผลเฉลยได้

The perturbation to the soliton solution of the general nonlinear Schrödinger equation from the long-wavelength in the perpendicular direction to the soliton makes the unstable soiton in any possible forms of the equation. The growth rate can be shown in a graph because there is no analytic form.

สารบัญ

สารบัญรูป

บทที่ 1

บทนำ

ในบทนี้จะเป็นการรายงานภาพรวมของโซลิตอนที่มีผู้ค้นพบ หรือ รายงานในระบบต่างๆ

1.1 โซลิตอน

โซลิตอน (soliton) เป็นการเรียนชื่อคลื่นโซลิตารี (solitary waves) เนื่องจากว่าเมื่อคลื่นโซลิตารีสองตัววิ่งชนกัน หลังจากการชนกันจะได้คลื่นโซลิตารีตัวเดิมกลับมา ซึ่งเป็นคุณสมบัติของอนุภาค ดังนั้นเราจึงเรียกคลื่นโซลิตารีอีกชื่อหนึ่งว่าโซลิตอน

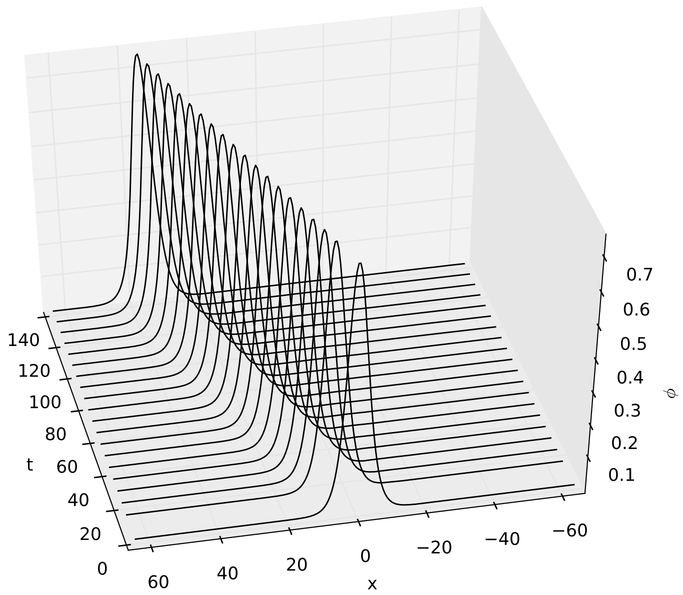
คลื่นโซลิตารีถูกค้นพบครั้งแรกโดย John Scott Russell [2] เมื่อสังเกตุคลื่นที่เกิดจากการหยุดของเรือในลำคลองของสกอตแลนด์ โดยคลื่นที่เกิดขึ้นหน้าเรือนั้นจะวิ่งไปด้วยอัตราเร็วคงที่และไม่มีการกระจายเหมือนคลื่นทั่วไป อย่างไรก็ดีสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้บรรยายโซลิตอนนี้ได้ถูกคิดขึ้นโดย Korteweg และ de Vries จนเป็นที่มาของสมการ Korteweg-de Vries (KdV) [2]

$$\phi_t + \phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

โดยตัวห้อย t และ x แสดงอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา และ อวกาศ (space) เทอมที่สองแสดงความไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinearity) และเทอมสุดท้ายแสดง ลักษณะการกระจายตัว (dispersion) ของคลื่น นอกจากจะสามารถหาได้จากคลื่นน้ำ บริเวณชายฝั่งแล้ว (1.1) ยังสามารถหาได้จากตัวกลางพลาสมาเช่นกัน [3] ผลเฉลยของสมการ KdV (1.1) แสดงถึงการวิวัฒน์ตามเวลาของความสูงของคลื่น KdV แบบ traveling wave สามารถเขียนได้เป็น

$$\phi(x,t) = 12\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(x - Vt - x0)$$

ซึ่ง η เป็นค่าคงที่ และ V แสดงอัตราเร็วของคลื่น รูปที่ 1.1 แสดงการเคลื่อนที่ของโซลิตอนจากสมการ (1.1) ที่ความสูงของคลื่นไม่มีการเปลี่ยนแปลงขณะเคลื่อนที่ นอกจากกลุ่มของสมการที่อยู่ในรูปของสมการ KdV แล้ว ยังมีอีกกลุ่มหนึ่งซึ่งให้ผลเฉลยอยู่ในรูปของโซลิตอน เหมือนกันกลุ่มนี้จะเรียกว่า สมการ nonlinear Schrödinger equation โดยสมการที่รู้จักกันดีในโดยเฉพาะในการ



รูปที่ 1.1: การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ KdV โดยใช้ $\eta = 0.25$, $x_0 = 0$, $V = 0.25$

ไฟเบอร์ ใยแก้วนำแสงคือ cubic nonlinear Schrödinger equation (cNLS) [4]

$$\mathrm{i}\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi = 0 \tag{1.2}$$

ผลเฉลยของสมการ (1.2) ในรูปของ traveling wave จะเขียนได้เป็น

$$\phi(x,t) = \sqrt{2}\eta\,\mathrm{sech}\,\eta(x - Vt - x_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(xV/2 - Vt)}$$

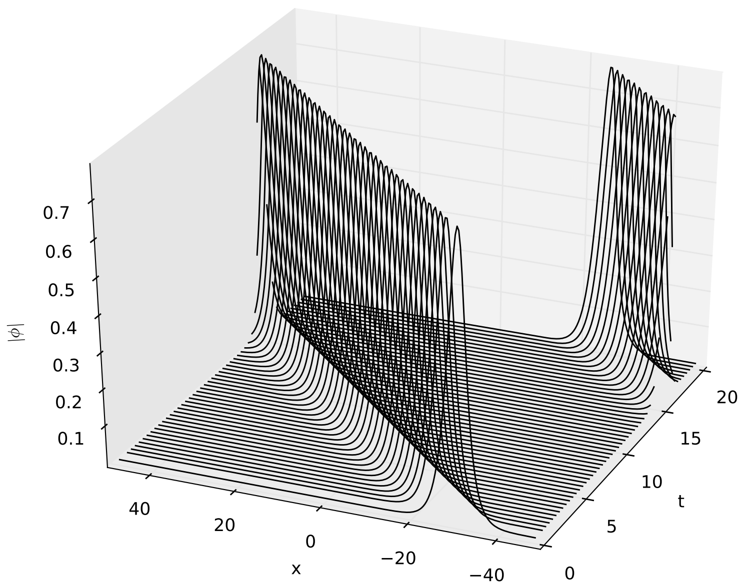
โดย V แสดงอัตราเร็วของโซลิตอน และ η เป็นค่าคงที่ รูปที่ 1.2 แสดงการวิวัตน์ตามเวลาของผลเฉลยของสมการ cNLS ด้วยวิธีการหาผลเฉลยแบบ traveling wave solution จะทำให้เราสามารถหารูปของ ผลเฉลยที่เป็นโซลิตอนออกมาได้ สำหรับสมการชเรอดิงเจอร์ไม่เชิงเส้นที่บรรยายการสั่นของประจุบวก ในสถานพลาสมาที่มีประจุลบวิ่งอยู่รอบๆ [5] จะเขียนอยู่ในรูป

$$\mathrm{i}\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^{1/2}\phi = 0 \tag{1.3}$$

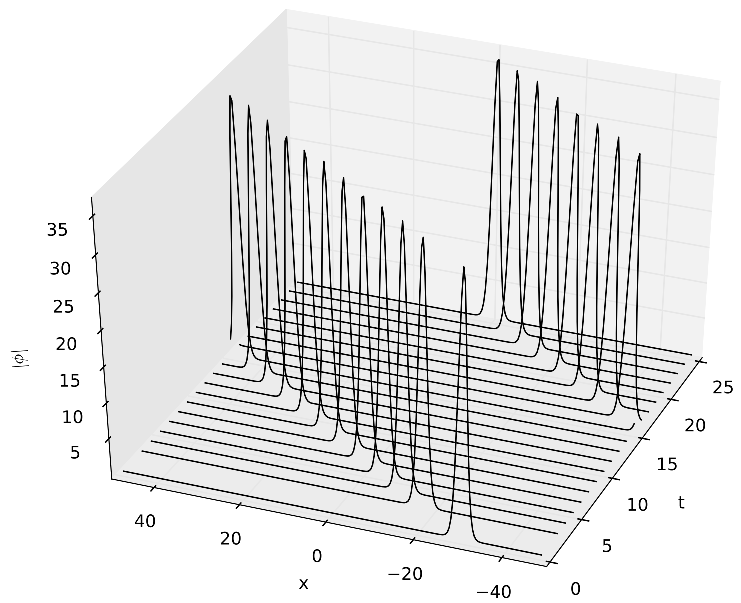
ผลเฉลยของสมการ (1.3) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\phi(x,t) = 400\eta^4\,\mathrm{sech}^2\,\eta(x - Vt - x_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(xV/2 - Vt)}$$

และการวิวัฒน์ของโซลิตอนนี้แสดงในรูป 1.3 จากศึกษาการวิวัฒน์ตามเวลาของสมการไม่เชิงเส้นทั้งสามสมการ เราพบว่าผลเฉลยอยู่ในรูปของคลื่นโซลิตารี เพราะว่าความสูงของคลื่นไม่มีการเปลี่ยนแปลง อย่างไรก็ดีเราสามารถยืนยันคุณสมบัติของคลื่นโซลิตารีได้จากการ ชนกันระหว่างคลื่นสองขบวน



รูปที่ 1.2: การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ cNLS โดยใช้ $\eta = 0.5$, $x_0 = -30$, $V = 5.0$



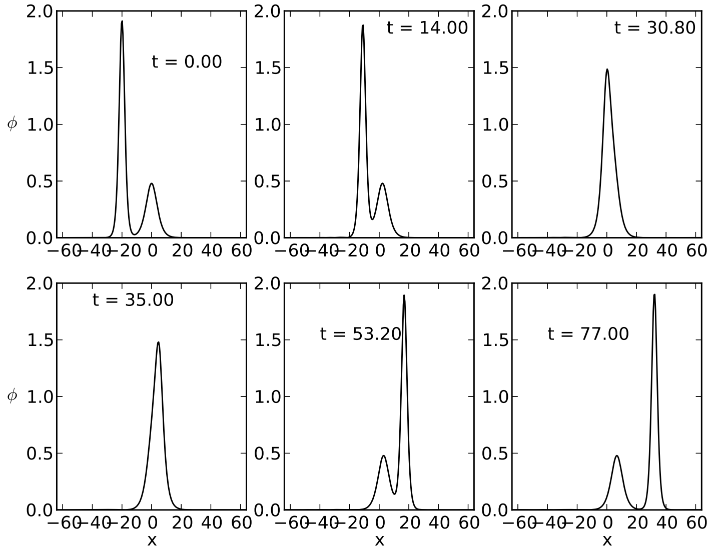
รูปที่ 1.3: การวิวัฒน์ของคลื่นโซลิตอนของสมการ sNLS โดยใช้ $\eta = 0.5$, $x_0 = -30$, $V = 5.0$

1.2 การชนกันระหว่างโซลิตอนสองตัว

ปรากฏการณ์อย่างหนึ่งที่สำคัญซึ่งทำให้โซลิตอนแตกต่างจากคลื่นแบบอื่นๆคือการชนกัน (collision) โดยจะได้โซลิตอนลักษณะเดิมกลับมาหลังจากชนกันแล้ว ดังแสดงให้ดูตามรูปที่ 1.4 โดยใช้ เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$\phi(x,t) = 12\eta_1^2 \,\mathrm{sech}^2\, \eta_1(x - V_1 t - x_{01}) + 12\eta_2^2 \,\mathrm{sech}^2\, \eta_2(x - V_2 t - x_{02})$$

จากค่าเริ่มต้นต่างๆ อัตราเร็วของคลื่นโซลิตอนไม่เร็วมากทำให้มีเวลาในการศึกษาพฤติกรรมระหว่างชนกันนาน ขึ้น โดยจะสังเกตว่าการชนกันระหว่างคลื่นโซลิตารีในช่วงเวลาที่ 30.8 ถึง 35 ไม่ใช่เป็นการ รวมกันแบบ superposition เมื่อคลื่นเชิงเส้นทั่วไป เพราะความสูงของคลื่นทั้งสองขณะชนกัน ($t = 30.8$) มันไม่ใช่นำความสูงของคลื่นทั้งสองมารวมกัน ความสูงของคลื่นจะลดลง แต่หลังจากชนกันแล้ว ความสูงของคลื่นโซลิตารีจะกลับมาเป็นแบบเดิม ลักษณะการชนแบบนี้เราจะเรียกว่าชนแบบยืดหยุด (elastic collision) และทำให้เราเรียกคลื่นโซลิตารีอีกชื่อหนึ่งว่าคลื่นโซลิตอนนั่นเอง สำหรับสมการ cNLS เราจะใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น



รูปที่ 1.4: การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ KdV โดยใช้ $\eta_1 = 0.25$, $x_{01} = 0$, $V_1 = 0.25$, $\eta_2 = 0.4$, $x_{02} = -20$, $V_2 = 0.64$

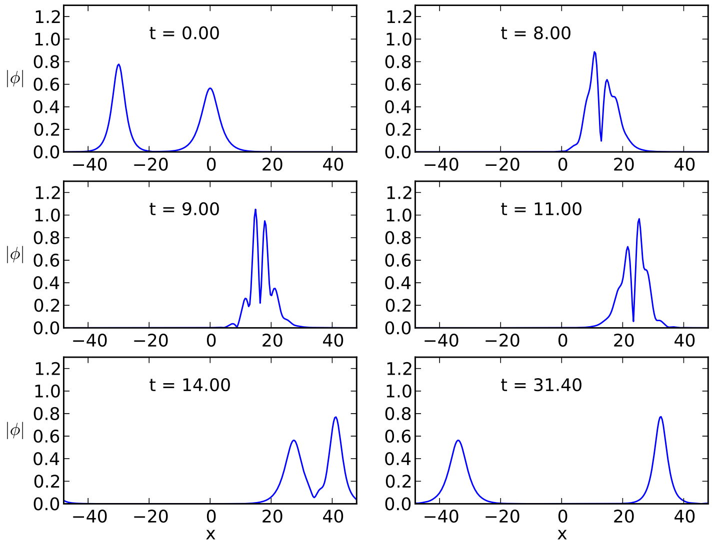
$$\phi(x,t) = \sqrt{2}\eta_1^2 \,\mathrm{sech}\,\eta_1(x - x_{01})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xV_1/2} + \sqrt{2}\eta_2^2 \,\mathrm{sech}\,\eta_2(x - x_{02})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xV_1/2}$$

ผลการคำนวณเชิงตัวเลขจะแสดงในรูป 1.5 สำหรับเงื่อนไขนี้ความสูงของคลื่นโซลิตารีไม่ขึ้นกับอัตราเร็ว เราจำเป็นต้องกำหนด อัตราเร็วของคลื่นเอง และ สมการที่เราสนใจในกรณีหนึ่งมิติ จะใช้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

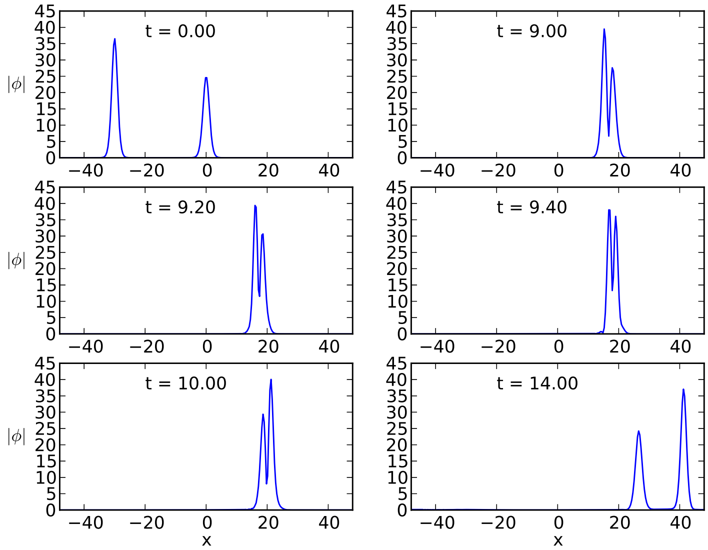
$$\phi(x,t) = 400\eta_1^4 \,\mathrm{sech}^4\,\eta_1(x - x_{01})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xV_1/2} + 400\eta_2^4 \,\mathrm{sech}^4\,\eta_2(x - x_{02})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xV_1/2}$$

ผลการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับการชนกันจะแสดงในรูป 1.6 สำหรับรูปที่ 1.7 แสดงเหตุการณ์ทั้งหมดใน 3 มิติ

การจำลองการชนกันของผลเฉลยทั้งสามแบบ แสดงว่าเป็นการชนกันแบบยืดหยุ่น โดยเราสามารถเรียกผลเฉลย ทั้งสามแบบนี้ว่าโซลิตอน อย่างไรก็ตามเราสนใจหาความไม่เสถียรของโซลิ



รูปที่ 1.5: การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ cNLS โดยใช้ $\eta_1 = 0.4$, $x_{01} = 0$, $V_1 = 2.0$, $\eta_2 = 0.55$, $x_{02} = -30$, $V_2 = 5.0$

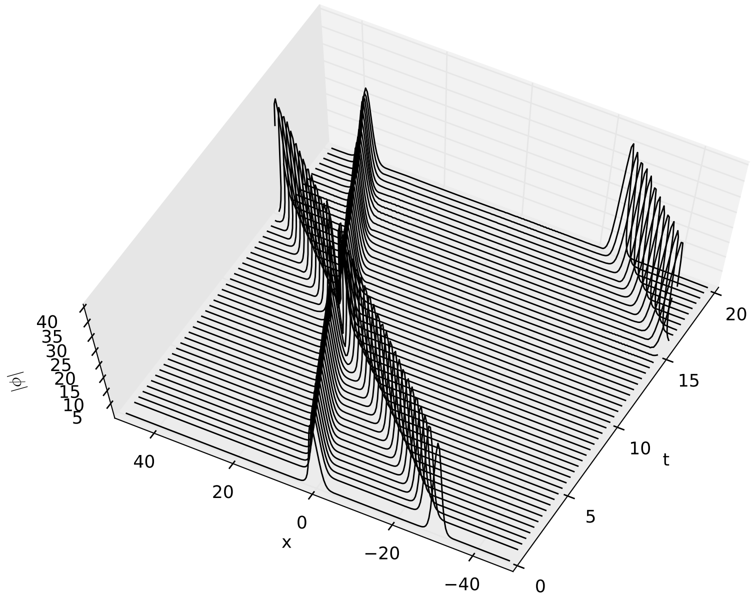


รูปที่ 1.6: การชนกันของคลื่นโซลิตอน 2 ตัว ของสมการ sNLS โดยใช้ $\eta_1 = 0.5$, $x_{01} = 0$, $V_1 = 2.0$, $\eta_2 = 0.55$, $x_{02} = -30$, $V_2 = 5.0$

ตอนของสมการชเรอดิงเจอร์รูปแบบทั่วไป

$$\mathrm{i}\phi_t + \phi^{p/q}\phi_x + \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \tag{1.4}$$

โดย p และ q เป็นตัวเลขจำนวนเต็มใดๆ การหาความไม่เสถียรของผลเฉลยแบบโซลิตอน จะความท้าทายเชิงคณิตศาสตร์ในเรื่องของความไม่เชิงเส้น รวมทั้งการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อศึกษา



รูปที่ 1.7: แสดงมุมมองแนวสูงโดยใช้เงื่อนไขเดียวกับรูป 1.6

การวิวัฒน์ของโซลิตอนที่ไม่เสถียร พร้อมที่จะเปลี่ยนไปอยู่ในมิติที่สูงกว่า ซึ่งระเบียบวิธีเชิงตัวเลข อาจไม่ เสถียรพอที่จะศึกษาได้

ในบทต่อไปเราจะพิจารณาผลเฉลย และ การรบกวนเพื่อดูว่าความยาวช่วงใดที่จะทำให้ผลเฉลยไม่เสถียร รวม ทั้งมีโอกาสที่จะผลเฉลยจะเสถียรหรือไม่ตามเงื่อนไขการรบกวน

บทที่ 2

การรบกวนของจากคลื่นความยาวสูงในแนวตั้งฉาก

เราจะวิเคราะห์ความไม่เสถียรของผลเฉลยโซลิตอนจากการรบกวนด้วยคลื่นมีมีความยาวคลื่นสูง หรือ $k = 2\pi/\lambda << 1$ ซึ่งเราจะใช้คลื่นที่รบกวนเป็นคลื่นฟังก์ชัน cosine โดย เฉลยของสมการ (1.4) สามารถเขียนได้เป็น

$$\phi_0(x,t) = u(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$$

ซึ่ง

$$u^{p/q}(\xi) = \left(\frac{p+2q}{2q}\right)(k^2-\omega)\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{p\sqrt{k^2-\omega}}{2q}(\xi-\xi_0)\right)$$

จะเป็นผลเฉลยที่ยังไม่ได้ถูกรบกวน เมื่อใส่การรบกวนเข้าไปในทิศตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของคลื่น จะพบว่า

$$\phi = \phi_0 + \epsilon n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{k}y+\gamma t} \tag{2.1}$$

โดย ϵ เป็นค่าที่เล็กมาก n เป็นฟังก์ชันที่บรรยายพฤติกรรมระหว่างการถูกรบกวน $\bar{k}$ เป็นความยาวคลื่นที่นำมารบกวน และ γ แสดงค่าของอัตราการเพิ่ม ซึ่ง ถ้าค่า $\gamma > 0$ จะเกิดอัตราการเพิ่มสูงขึ้นตามเวลา ในขณะที่ $\gamma < 0$ จะเป็นเป็นการลดลง (decay) ตามเวลา ส่วน γ ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะบอกถึงการสั่น (oscillation) ซึ่งสองค่าหลังเราไม่สนใจเพราะไม่ได้ ทำให้เกิดผลอะไร เราจะแทนค่าสมการ (2.1) ลงใน สมการ (1.4) โดย เก็บค่าถึง ϵ กำลัง 1 ™ ϵ^0 จะได้สมการตามปริมาณจริง และ เชิงซ้อน ตามลำดับดังนี้

$$\begin{aligned}(\omega-k^2)\phi_0 + \phi_{0\xi\xi} + |\phi_0|^{p/q}\phi_0 &= 0\\ (-c+2k)\phi_{0\xi} &= 0\end{aligned}$$

สำหรับ กำลัง 1 ของ ϵ จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\omega n + \mathrm{i}n_t - k^2 n + 2\mathrm{i}kn_\xi + n_{yy} + n_{\xi\xi} + \frac{p}{2q}|\phi_0|^{p/q}n^* + \left(\frac{p}{2q}+1\right)|\phi_0|^{p/q}n = 0 \tag{2.2}$$

n^* เป็น complex conjugate ของ n และ สำหรับความเป็นไปได้ของฟังก์ชัน n เราจะกำหนดให้

$$\begin{aligned} n(\xi, y, t) &= w(\xi, y, t) + \mathrm{i}v(\xi, y, t) \\ &\propto (w(\xi), v(\xi))\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{k}y+\gamma t} \end{aligned} \tag{2.3}$$

เมื่อแทนค่า n ในสมการ (2.3) ลงในสมการ (2.2) จะแยกพิจารณาเป็นค่าจริงได้เป็น

$$(\omega - k^2)w - \gamma v - \bar{k}^2 w + w_{\xi\xi} + \left(\frac{p}{q} + 1\right) |\phi_0|^{p/q} w = 0 \tag{2.4}$$

และ ส่วนที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะเขียนได้เป็น

$$(\omega - k^2)v + \gamma w - \bar{k}^2 v + v_{\xi\xi} + |\phi_0|^{p/q} v = 0 \tag{2.5}$$

จากสมการ (2.4) และ (2.5) จะเขียนให้อยู่ในเทอมของ Lagrangian เพื่อสะดวกในการหาค่า v และ w จากการการใช้ฟังก์ชันเริ่มต้นต่างๆ

$$\mathcal{S} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dt \tag{2.6}$$

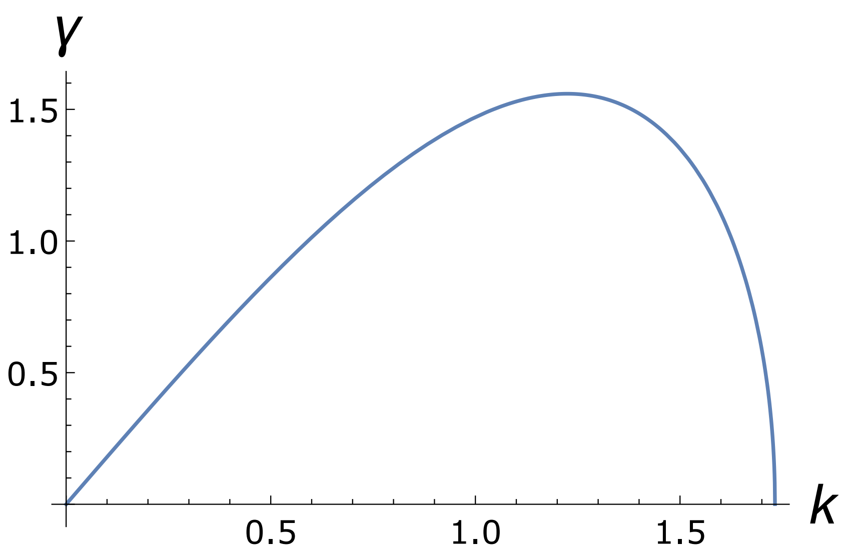
โดย

$$\mathcal{L} = \left(\frac{w_\xi^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{v_\xi^2}{2}\right)^2 + \gamma v w - \left[\left(\frac{p}{q} + 1\right) |\phi_0|^{p/q} + (\omega - k^2 - \bar{k}^2)\right] \frac{w^2}{2} + \left[|\phi_0|^{p/q} + (\omega -\right.$$

สำหรับหาผลเฉลยของสมการ (2.4) และ (2.5) โดยคิดการแปรเปลี่ยน (variational method) จะต้องหาฟังก์ชันเริ่มต้นมาก่อน โดยเราสามารถกำหนดเป็นฟังก์ชันอะไรก็ได้ แต่ต้องปรับเปลี่ยนเพื่อให้ค่า $\mathcal{S}$ มีค่าน้อยที่สุด เราจะใช้ผลเฉลยของ (2.4) และ (2.5) ในกรณีที่กำหนดให้ $\gamma = 0$ เพราะว่าเป็นผลเฉลยที่เสถียรเนื่องจากสมการ (2.1) มีลักษณะเป็นการสั่น (oscillation) และจะใส่ ค่าสำหรับการปรับเพื่อให้ได้ค่าที่ต่ำสุดหน้าฟังก์ชันโดย

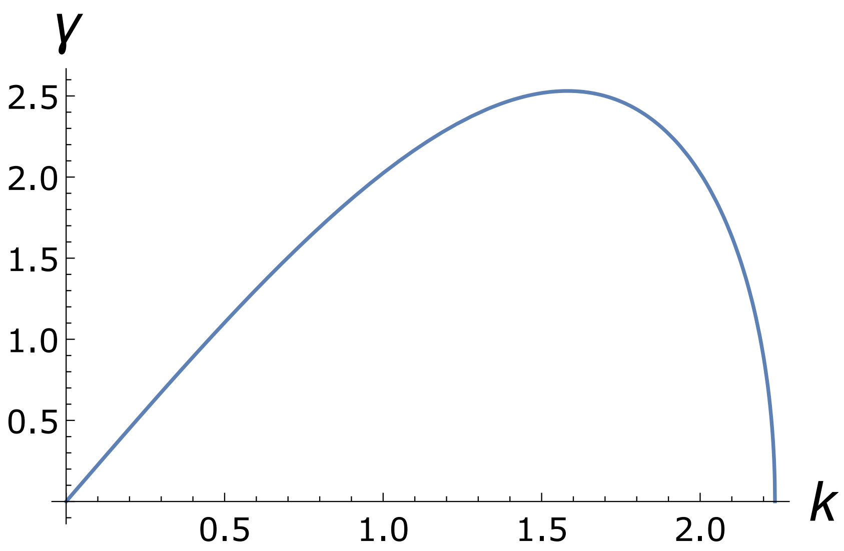
$$\begin{aligned} w(\xi) &= \beta\, \mathrm{sech}^{2q/p+1}(\eta\xi) \\ v(\xi) &= \alpha\, \mathrm{sech}^{2q/p}(\eta\xi) \end{aligned}$$

โดย α และ β เป็นค่าคงที่ เนื่องจากเราจะเขียนโปรแกรมสำหรับการคำนวณหาค่าอัตราการเพิ่มโดยใช้ Mathematica [6] จะพิจารณาค่า p และ q ดังนี้ $p = 2, q = 1$ ซึ่งจะเป็นสมการ cubic nonlinear Schrödinger (cnls) [7] โดยจะได้ผลดังรูปที่ 2.1 ช่วงที่จะทำให้ไม่เสถียร สำหรับกรณี $p = 1, q = 1$ หรือ เราจะเรียกว่าสมการ quadratic nonlinear Schrödinger



รูปที่ 2.1: ผลอัตราการเพิ่มสำหรับค่า $p = 2, q = 1$

(qnls) [8] แม้ว่า จะยังไม่มีใครคำนวณหาอัตราการเพิ่มจากการรบกวนแบบนี้มาก่อน โดยผลค่าของความยาวคลื่น ที่จะทำให้ผลเฉลยไม่เสถียรจะแสดงตามรูปที่ ?? สำหรับกรณี $p = 4, q = 1$

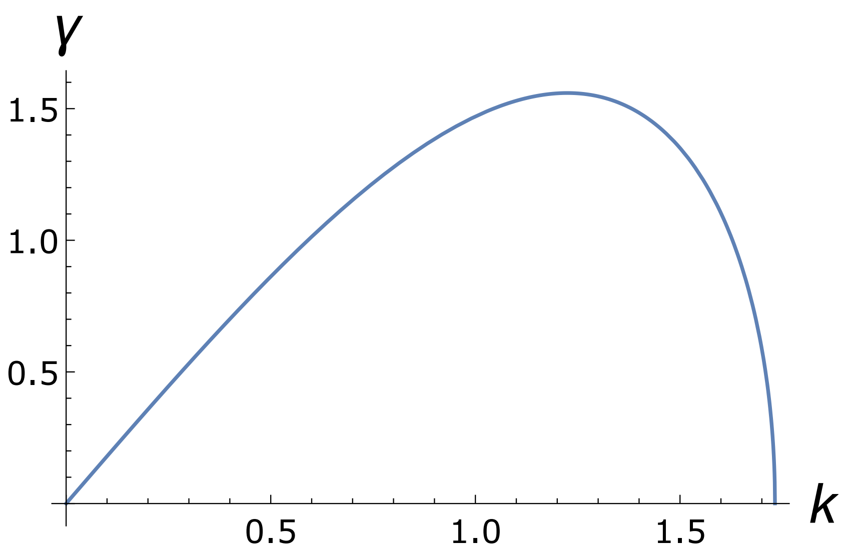


รูปที่ 2.2: ผลอัตราการเพิ่มสำหรับค่า $p = 1, q = 1$

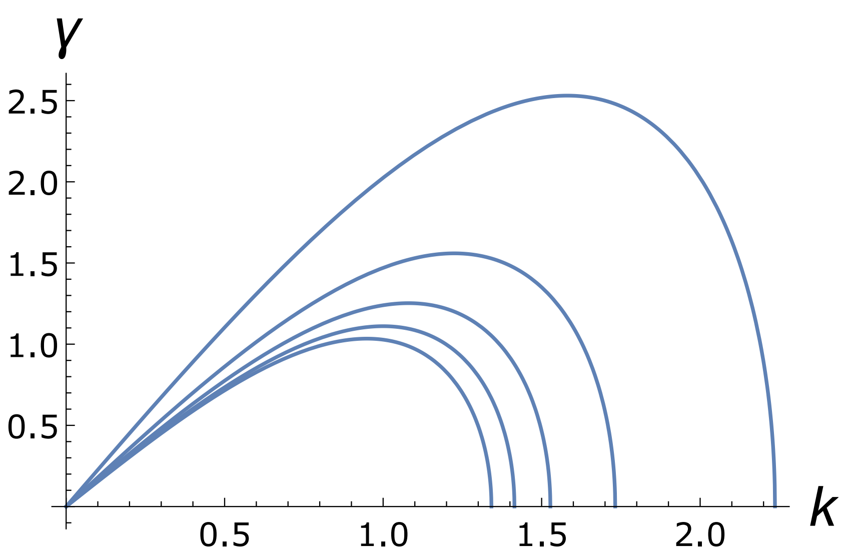
หรือ เราจะเรียกว่าสมการ quintic nonlinear Schrödinger (qnls) [9] จะแสดงตามรูปที่ 2.3 สำหรับผลการคำนวณของทุกค่าของสมการชเรอดิงเจอร์ที่เทอมไม่เชิงเส้นเป็นกำลังเศษส่วน [10]

$$\text{i}\phi_t + \phi_{xx} + \phi_{yy} + |\phi|^{1/q}\phi = 0$$

จะแสดงทุกค่าตั้งแต่ $p = 1$ ถึง $p = 5$ ตามรูปที่ 2.4 เราจะพบว่าภายใต้เงื่อนไขการรบกวนในแนวตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของคลื่น ความยาวคลื่นสูงจะ ทำให้ผลเฉลยโซลิตอนของสมการชเรอดิงเจอร์ไม่เชิงเส้นแบบทั่วไปไม่เสถียรทุกรูปแบบ



รูปที่ 2.3: ผลอัตราการเพิ่มสำหรับค่า $p = 4, q = 1$



รูปที่ 2.4: ผลอัตราการเพิ่มสำหรับค่า $p = 1$ และ $q = 1$ ถึง 5 โดยเส้นล่างสุดคือ $p = 1$ และ เส้นบนสุดคือ $p = 5$

บทที่ 3

สรุป และ วิเคราะห์ผล

สมการไม่เชิงเส้นชเรอดิงเจอร์รูปแบบทั่วไป ใน 2 มิติ

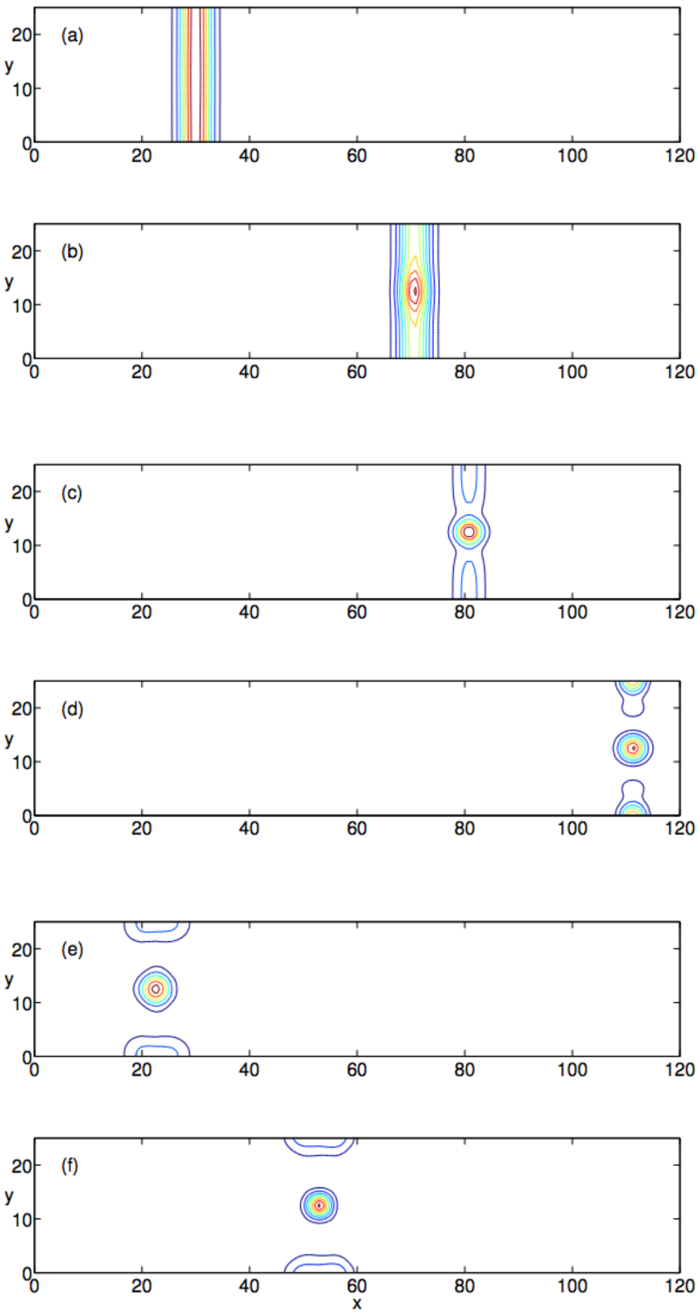
$$\mathrm{i}\phi_t + \phi_{xx} + \phi_{yy} + |\phi|^{p/q}\phi = 0$$

อาจไม่สามารถหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ได้ แต่สำหรับในกรณีที่เป็น 1 มิติj

$$\mathrm{i}\phi_t + \phi_{xx} + |\phi|^{p/q}\phi = 0$$

เราสามารถหาคำตอบได้จากผลเฉลยแบบคลื่นเคลื่อนที่ (travelling wave solution) ซึ่งจะใช้ผลเฉลยหนึ่ง ในรูปของโซลิตอน และเมื่อทำการรบกวนโซลิตอนด้วยคลื่นที่มีความยาวคลื่นสูงๆซึ่งเราสามารถหาช่วง ของความยาวคลื่นที่จะทำให้โซลิตอนไม่เสถียรได้ และ เราพบว่าสมการไม่เชิงเส้นชเรอดิงเจอร์รูปแบบทั่วไป จะไม่เสถียรเสมอ

ผลของความไม่เสถียรนั้นโดยทั่วไปจะนำไปสู่โซลิตอนในมิติที่สูงขึ้นไป เหมือนกับสมการไม่เชิงเส้นที่ให้ผลเฉลย เป็นโซลิตอนด้วย [11, 12, 5] อย่างไรเราได้ทำการศึกษาการวิวัฒน์การเวลาของสมการ ชเรอดิงเจอร์ไม่เชิงเส้นที่กำลังเศษสามส่วนสอง, $p = 1, q = 2$ [1] ตามรูปที่ 3.1.



รูปที่ 3.1: รูปแสดงความไม่เสถียรของโซลิตอนในกรณี $p = 1, q = 2$ [1]

บรรณานุกรม

[1] S. Phibanchon and M. A. Allen, *Int. J. Math. Comput. Sci.* **6**, 1 (2012). `www.waset.org/journals/ijmcs/v6.php`

[2] E. Infeld and G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*, 2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[3] H. Washimi and T. Taniuti, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 996 (1966).

[4] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 4th edn. (Academic Press, New York, 2007).

[5] S. Phibanchon and M. A. Allen, in *The 34th Congress on Science and Technology of Thailand*, p. D0029 (King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 2008).

[6] S. Wolfram, *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, 2nd edn. (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1991).

[7] D. Anderson, M. Lisak, and A. Berntson, *Pramana J. Phys.* **57**, 917 (2001).

[8] S. Phibanchon and M. A. Allen, in *Burapha University International Conference*, pp. 369–375 (2012).

[9] S. Phibanchon and Y. Rattanachai, in *Burapha University International Conference*, pp. 621–627 (2013).

[10] S. Phibanchon and C. Sirisawat, *Burapha University International Conference* pp. 596–600 (2015).

[11] S. Phibanchon and M. A. Allen, in *The 2007 International Conference on Computational Science and its Applications (ICCSA 2007)*, pp. 20–3 (IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA, USA, 2007).

[12] S. Phibanchon and M. A. Allen, in *The 33rd Congress on Science and Technology of Thailand*, p. 213 (Walailuk University, Nakorn Si Thammarat, 2007).